

## Control 4

**P1. (a)** Sea  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función que satisface las siguientes propiedades:

$$\forall x, y \in (0, \infty), f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \text{ y } f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x).$$

(a1) (1.0 pto.) Pruebe que  $f(1) = 0$  y que  $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ ,  $\forall x, y \in (0, \infty)$ .

(a2) (1.0 pto.) Demuestre, usando inducción, que  $\sum_{k=1}^n f(k) = f(n!)$ ,  $\forall n \geq 1$ .

(a3) (1.0 pto.) Demuestre, sin usar inducción, es decir, calculando la suma, que

$$\sum_{k=1}^n kf\left(1 + \frac{1}{k}\right) = (n+1)f(n+1) - f((n+1)!).$$

(b) (3.0 pto.) Demuestre, sin usar inducción, que

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} \binom{j}{i} \frac{2^{2i}}{3^j} = \frac{3^n - 1}{2} \left[ 3 - \frac{1}{3^n} \right].$$

**P2. (a)** Sea  $(A, *)$  una estructura algebraica con  $*$  l.c.i. asociativa en  $A$ , y sea  $a \in A$  fijo.

Se define  $B = \{x \in A : a * x = x * a\}$ .

(a1) (2.0 pto.) Demuestre que  $\forall x, y \in B$ ,  $(x * y) \in B$ .

(a2) (1.0 pto.) Si para  $*$  existe neutro  $e \in A$ , entonces  $e \in B$ .

(a3) (2.0 pto.) Si  $x \in B$  tiene inverso  $x^{-1} \in A$  para  $*$ , entonces  $x^{-1} \in B$ .

(b) (1.0 pto.) Se define el conjunto  $C$  por:

$$C = \{(m, n) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} : (m + n) \in \mathbb{Z}\}.$$

Demuestre que  $C$  es numerable.

Tiempo: 1.15 horas.